数理解析研究所講究録
182巻 1973年 53-69

ベクトル値ポアッソン積分と調和セクションの作るHardy class について

名大 理学部　浦川 肇

§1. 序

$D=\{z\in\mathbb{C}^1 ; |z|<1\}$ 単位球 とし、$B=\{e^{it} ; 0\leq t\leq 2\pi\}$ をDの境界とする。また $db=\frac{1}{2\pi}dt$ をB上の回転で不変な測度とし、B上の関数 ϕ に対して次のような積分（ポアッソン積分）を考える：

$$\mathcal{P}_\mu\phi(z):=\int_B P(z,b)^\mu\phi(b)\,db$$

ここで μ は複素数であり、$P(z,b)$（ポアッソン核と呼ばれる）は

$$P(z,e^{i\theta}):=\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$$

によって与えられるものとする。この時次のような事実が成り立つことが知られている。

$z=x+iy$，　$\Delta:=-(1-|z|^2)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ D上の Laplace-Beltrami 作用素とした時、

$$\Delta\,\mathcal{P}_\mu\phi=4\mu(1-\mu)\,\mathcal{P}_\mu\phi$$

が成り立つ。更に

(i) μ：正なる実数，B上の連続関数 ϕ に対し，B上の各点 e^{it} において，

$$\lim_{r \uparrow 1} c_\mu (1-r^2)^{\mu-1} \mathcal{P}_\mu \phi(re^{it}) = \phi(e^{it})$$

が成り立つ。ここで $c_\mu = \Gamma(\mu)^2 / \Gamma(2\mu-1)$，$\Gamma(\mu)$ はいわゆるガンマ関数である。

(ii) $\mu = 1$ の時，(イ) $\phi \in L^1(B)$ に対しては，ほとんど到る所の e^{it} において

$$\lim_{r \uparrow 1} \mathcal{P}_\mu \phi(re^{it}) = \phi(e^{it})$$

が成り立ち，特に (ロ) $p > 1$ に対しては次のことが成り立つ。D上の関数 f に対して，$f_r(u) := f(ru)$，$0 \leq r < 1$，$u \in B$ によってB上の関数 f_r を定義し，db に関する L^p-norm を $\|f_r\|_p$ とおく。そこで Hardy class と呼ばれる関数空間 $H^p(D)$ を，

$$H^p(D) := \left\{ f : D \to \mathbb{C},\ C^\infty\text{-関数} \;\middle|\; \Delta f = 0 \text{ かつ } \sup_{0<r<1} \|f_r\|_p < \infty \right\}$$

と定義すると，$H^p(D)$ はノルム $\|f\|_p := \sup_{0<r<1} \|f_r\|_p$ に関して Banach空間となり，$\mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}_1$ によって，$L^p(B) \cong H^p(D)$ なる Banach空間としての同型が与えられる。

ところで，一般に，非コンパクト型のエルミート対称空間 G/K において，ポアッソン積分は次のように拡張された (K. Okamoto [11])：G/K を Harish-Chandra の imbedding により，複素

空間の有界領域$\mathcal{D}$として，正則同型に埋め込む。この時$\mathcal{D}$のŠilov境界は均質空間$G/B(E)$と同一視できる（$B(E)$はGの極大parabolic部分群）。Kの表現τにassociateしたG/K上のvector bundle E_τを考え，$G/B(E)$上のvector bundleのsectionの作る空間から，E_τのsectionの作る空間への写像としてポアッソン積分を一般化する。すなわち，境界$G/B(E)$上のGの表現をG/K上のGの表現に写す写像として定義された。

そこで我々は，単位円板D上のHardy class $H^p(D)$を拡張し，一般化されたポアッソン積分の境界値を調べることにより，どのような境界$G/B(E)$上の表現が，ポアッソン積分によって一般化されたHardy classに写されるかを調べる。この結果，離散系列とそのlimitに続く非ユニタリ有界表現のある系列が出てくることがわかった。これは，Knapp-Okamoto [5]の結果のanalogyである。

§2. ポアッソン積分の境界値について

Gを非コンパクト半単純リー群，KをGの極大コンパクト部分群とし，均質空間G/Kが対称空間になっているとする。$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$をG，Kのリー環とし，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{s}$をCartan分解とする。$\mathfrak{a}$を$\mathfrak{s}$の極大可換部分環，$\mathfrak{h}$を$\mathfrak{a}$を含む$\mathfrak{g}$のCartan部分環とする。$\Sigma$を$(\mathfrak{g}^c, \mathfrak{h}^c)$に関するルート系とする。（一般に実リー環$\mathfrak{m}$に対し，その複素化を$\mathfrak{m}^c$と書くことにする。）また$\sigma$

を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{g}$ に関する conjugation とし、Σ の順序 > を、"$\alpha > 0$ かつ α の $\mathfrak{a}$ への制限が恒等的に零でなければ、$\sigma(\alpha) > 0$" となるように定義する — <u>σ order</u>。Σ_0 を $\mathfrak{a}$ で恒等的に零になる Σ の元全体とし、$\Sigma - \Sigma_0$ の元の $\mathfrak{a}$ への制限を<u>制限根</u>という。Σ の上の順序より、制限根の集合に順序を定義し、F を制限根のこの順序に関する基本系とする。F の部分集合 E に対して、Moore [10] に従って次のような集合を定義する：

$$\mathfrak{a}(E) := \{ H \in \mathfrak{a} \,;\, \gamma(H) = 0 \ \ \forall \gamma \in E \}$$

$$\Sigma_0(E) := \{ \alpha \in \Sigma \,;\, \pi(\alpha) = \sum_{\gamma \in E} n_\gamma \gamma, \ n_\gamma : \text{整数} \}$$ （π は Σ の $\mathfrak{a}$ への制限）

$$\Sigma_+(E) := \{ \alpha \in \Sigma - \Sigma_0(E) \,;\, \alpha > 0 \}, \quad \Sigma_-(E) := \{ \alpha \in \Sigma - \Sigma_0(E) \,;\, \alpha < 0 \}$$

この時、$\sum_{\alpha \in \Sigma_+(E)} \mathbb{C} E_\alpha$、$\sum_{\alpha \in \Sigma_-(E)} \mathbb{C} E_\alpha$ は σ で不変な $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分環で、$\mathfrak{g}$ とのそれぞれの共通部分を $\mathfrak{n}(E)$, $\bar{\mathfrak{n}}(E)$ とする（E_α は α に対する root vector）。また $\mathfrak{z}(E)$ を $\mathfrak{n}(E)$ の $\mathfrak{g}$ における正規化環、$\mathfrak{m}(E)$ を $\mathfrak{a}(E)$ の $\mathfrak{k}$ における中心化環、B(E) を $\mathfrak{n}(E)$ の G における正規化群、M(E) を $\mathfrak{a}(E)$ の K における中心化群とする。また $N(E)$, $\bar{N}(E)$, $A(E)$ を $\mathfrak{n}(E)$, $\bar{\mathfrak{n}}(E)$, $\mathfrak{a}(E)$ に対応する G の部分群とする。E が空集合の時、E をはぶいて、$\mathfrak{a}$, A, $\mathfrak{n}$, $\bar{\mathfrak{n}}$, N, $\bar{N}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{m}$, B, M とかくことにする。

<u>定義</u>　$\lambda := z \rho_E \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, $z \in \mathbb{C}^1$ とする。ここで $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{a}$ の双対空間 $\mathfrak{a}^*$ の複素化とし、ρ_E は $\Sigma_+(E)$ の元の和の半分とする。また τ を K の有限次元ユニタリ表現で、その表現空間を V_τ と

する。この時

$$C_{\tau,\lambda}(G/B(E)) := \{\phi : G \to V_\tau \mid \text{連続写像で条件(1)を満す}\}$$

とおく。ここで、

(1) $\phi(gman) = e^{-(i\lambda+\rho_E)(\log a)}\,\tau(m^{-1})\,\phi(g)$

$m \in M(E)$, $a \in A$, $n \in N$ で、$\log a$ は $a = \exp(\log a)$ を満す $\mathfrak{a}$ の元。$B(E) = M(E)AN$ となることに注意。$p \geq 1$ に対し、

$$L^p_{\tau,\lambda}(G/B(E)) := \{\phi : G \to V_\tau \mid (1), (2) \text{ を満す}\}$$ とおく。

ここで、

(2) $\int_K \|\phi(k)\|^p dk < \infty$

$\|\cdot\|$ は V_τ におけるノルムで dk は K の Haar 測度である。

K. Okamoto [11] に従って、$C_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ 又は $L^p_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ の各元 ϕ に対して、ϕ の Poisson 積分 を

(3) $\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi(g) := \int_K \tau(k)\,\phi(gk)\,dk$

によって定義する。この時、定義から $\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi(gk) = \tau(k^{-1})\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi(g)$ を満し、$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi$ は、τ に associated した G/K 上の vector bundle の section となっているが、$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi$ の境界値は次のようになっていることがわかる。ここで $g \in G$ に対し、$g = k(g)\exp H(g)\, n$ ($k(g) \in K$, $H(g) \in \mathfrak{a}$, $n \in N$) を岩沢分解 $G = KAN$ に従った分解としておく。

命題 1

$\mathfrak{a}^+(E) := \{H \in \mathfrak{a}(E) ;\ \alpha(H) > 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma_+(E)\}$ とする。$H \in \mathfrak{a}^+(E)$

に対して，$a_t = \exp tH$ とおく。この時次のことがすべての $g \in G$ と $\phi \in C_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ に対して成り立つ：

$$(4)\ \lim_{t\to\infty} e^{(i\lambda+\rho_E)(\log a_t)} \mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi(g a_t) = \int_{\bar{N}(E)} \tau(k(\bar{n}))\phi(g) e^{(i\lambda-\rho_E)(H(\bar{n}))} d\bar{n}$$

命題 2

$1<p<\infty$ とする。すべての $\phi \in L^p_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ に対して，

$$(5)\ \lim_{t\to\infty}\int_K \left\{ \left\| e^{(i\lambda+\rho_E)(\log a_t)} \mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi(k a_t) - \int_{\bar{N}} \tau(k(\bar{n}))\phi(k) e^{(i\lambda-\rho_E)(H(\bar{n}))} d\bar{n} \right\| \right\}^p dk = 0$$

が成り立つ。

この命題から，$1<p<\infty$ かつ $\mathrm{Re}\langle i\lambda, \alpha\rangle < 0$ for all $\alpha \in \Sigma_+(E)$ が成り立つ時，$\phi \in L^p_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ に対して，

$$(6)\ \lim_{t\to\infty}\left\{ \int_K \left\| e^{(i\lambda+\rho_E)(\log a_t)} \mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi(k a_t)\right\|^p dk \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq C_E(-i\lambda_2)\, \|\phi\|_{L^p(K/M(E))}$$

が成り立つ。ここで，$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$，$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{a}^*$ かつ，$C_E(-i\lambda_2) = \int_{\bar{N}(E)} e^{-(\lambda_2+\rho_E)(H(\bar{n}))} d\bar{n} < \infty$ であり，$\|\phi\|_{L^p(K/M(E))}$ は $\|\phi(k)\|$ の普通の L^p-ノルムである。

これでポアッソン積分 $\mathcal{P}_{\tau,\lambda}$ の像の性質がわかったわけであるが，エルミート対称空間に対する次のような準備をしておく。

§3. エルミート対称空間のある性質

以後，G/K は a tube domain と正則同型なエルミート対称

領域と仮定する。またGは複素化$G^{\mathbb{C}}$をもつと仮定する。$\mathfrak{t}$を$\mathfrak{k}$のCartan部分環とすると、これは$\mathfrak{g}$のCartan部分環にもなっている。$T^{\mathbb{C}}$, $K^{\mathbb{C}}$をそれぞれ$G^{\mathbb{C}}$の$\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$に対応するリー(部分)群とする。Rを$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$に関するルート系とし、$\alpha \in R$に対し、$\mathfrak{g}_\alpha$を$\alpha$に対するルート空間とすると、$\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$又は$\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$となっているから、それに従って、$\alpha$をコンパクト・ルート，非コンパクト・ルートと呼ぶ。$R_{\mathfrak{k}}$, $R_{\mathfrak{n}}$をコンパクト・ルートの集合(非コンパクト・ルートの集合)としておく。また、$\mathfrak{p}$とG/Kの原点eKにおける接空間$T_{eK}(G/K)$とを自然に同一視し、$\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$と$T_{eK}(G/K)$の複素化$T^{\mathbb{C}}_{eK}(G/K)$とを同一視する。$\mathfrak{p}_-$ ($\mathfrak{p}_+$)をそれぞれ$T^{\mathbb{C}}_{eK}(G/K)$の正則(反正則)ベクトル全体の作る$\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$の部分空間とすると、$\mathfrak{p}_+$, $\mathfrak{p}_-$は、$\mathrm{ad}(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}})$不変な可換な$\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$の部分環で、$\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{p}_-$となっている。$P_+$, P_-を対応する$G^{\mathbb{C}}$のリー部分群とする。Rの部分集合P_nで、$\mathfrak{p}_+ = \sum_{\alpha \in P_n} \mathfrak{g}_\alpha$なるものが存在するから、Rの順序$>$として、Rの正のルートの集合Pが$P_n$を含むように定義する。$P_{\mathfrak{k}} = P \cap R_{\mathfrak{k}}$とおく。

さて今、τを$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$のコンパクトreal form $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$に関する$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$のconjugationとし、$\alpha \in R$に対してルート・ベクトルを$\tau E_\alpha = -E_{-\alpha}$となるようにとる。$\Delta$をHarish-Chandra[1]の構成した非コンパクト正ルートでstrongly orthogonal(i.e. 二つのルートα, βがstrongly orthogonalとは、$\alpha \pm \beta$がルートでないことをいう)なものの極大集合とする。そこで$\alpha \in \Delta$に対して、$X^0_\alpha := E_\alpha + E_{-\alpha}$,

$Y_\alpha^0 := (-\sqrt{-1})(E_\alpha - E_{-\alpha})$, $H'_\alpha := \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle} H_\alpha$ とおく。ただし H_α は $B(H_\alpha, H) = \alpha(H)$ をすべての $H \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ に対して満たす $\sqrt{-1}\,\mathfrak{t}$ の元である。更に、$X^0 := \sum_{\alpha\in\Delta} X_\alpha^0$, $Z^0 := -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{\alpha\in\Delta} H'_\alpha$ とおき、$\mathfrak{t}^- := \sqrt{-1}\sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}H'_\alpha$ $\mathfrak{t}^+$ を $\mathfrak{t}^-$ の $\mathfrak{t}$ における Killing form B に関する直交補空間とし、$\mathfrak{t}^-$ $\mathfrak{t}^+$ に対応する T のリー部分群を T^-, T^+ とする。$\mathfrak{a} := \sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}X_\alpha^0$ とすると $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ の極大可換環で、$\mathfrak{h} := \mathfrak{t}^+ + \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環となっており、A , H を G の対応するリー部分群としておく。

さて、Okamoto-Knapp [5] に従って

$$u_t := \exp\Big(\frac{\pi t}{4}\sum_{\alpha\in\Delta}(-\sqrt{-1})Y_\alpha^0\Big) \in G^{\mathbb{C}} , \quad 0 \le t \le 1$$

と定義する。この時、次のことが成り立つ。

<u>補題1</u>

G/K は既約なエルミート対称空間とする (a tube domain と正則同型であることは仮定しなくてもよい。)。この時 u_t は次のように分解する:

$$(7) \qquad u_t = \zeta_t\, k_t\, z_t \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

ここで、$\zeta_t = \exp\big(\tan\frac{\pi t}{4}\sum_{\alpha\in\Delta}E_{-\alpha}\big) \in P_-$, $k_t = \exp\big(\log(\cos\frac{\pi t}{4})\sum_{\alpha\in\Delta}H'_\alpha\big) \in T^{\mathbb{C}}$ $z_t = \exp\big(-\tan\frac{\pi t}{4}\sum_{\alpha\in\Delta}E_\alpha\big) \in P_+$ とする。更に $0 < t < 1$ に対して、

$$(8) \qquad \zeta_t = a_s\, h_r\, \eta_t$$

ここで、$a_s = \exp sX_0 \in A$, $\big(\tanh s = \tan\frac{\pi t}{4}\big)$,

$h_r = \exp\big(r\sum_{\alpha\in\Delta}H'_\alpha\big) \in T^{\mathbb{C}}$ $\big(e^r = 1/\cosh(s)\big)$

$\eta_t = \exp\big(-\tanh s \cdot e^{-2r}\sum_{\alpha\in\Delta}E_\alpha\big) \in P_+$

と分解することがわかる。

また次のことはよく知られている：

(9) $Ad(u_1) = id$ on $\mathfrak{t}^+$, $Ad(u_1)(H'_\alpha) = X^0_\alpha$, $\alpha \in \Delta$

従って $Ad(u_1)(\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{j}^{\mathbb{C}}$ となる。$Ad(u_1)$ を、Cayley transform という。(cf. Moore [10])。このことから、Σ を $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}^{\mathbb{C}})$ に関するルート系とすると、${}^tAd(u_1^{-1})$ によって、R は Σ に写る。そこで、我々は、Σ の順序 $>$ を、Σ の正ルート全体が、${}^tAd(u_1^{-1}) P$ と一致するように定義する。この時、

補題2 G/K が a tube domain と正則同型であることを仮定すると、上記の Σ の順序 $>$ は、σ-order すなわち、

"$0 < \alpha' \in \Sigma$ で、α' が $\mathfrak{a}$ で恒等的に零でなければ、$\sigma(\alpha') > 0$ が成り立つ。"

この補題から、§2 における Σ_0, $\Sigma_\pm$, F を考え、$E := \{\alpha \in F : \alpha(X^0) = 0\}$ を考えると、$\mathfrak{a}(E) = \mathbb{R}X^0$ で、$M(E)$ は、X^0 の K における中心化群で、$u_1^{-1} B(E) u_1 \in K^{\mathbb{C}} P_+$ となっている。また、δ を R の正ルートの和の半分、ρ を Σ_+ のルートの和の半分、ρ_E を、$\Sigma_+(E)$ のルートの和の半分とすると、

(10) $\rho = {}^tAd(u_1^{-1})\delta$ on $\mathfrak{a}$

$$\rho_E(X^0) = \rho(X^0) = \delta\Big(\sum_{\alpha\in\Delta} H'_\alpha\Big)$$

が成り立っていることに注意する。

§4 Hardy class の構成

以上のような準備の下に，Hardy class を構成しよう。Λ を $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ 上の dominant (Kに関して) 整形式とする。この Λ に対して τ_Λ を，K の既約ユニタリ表現で，最高ウェイトが Λ なるものとし，その表現空間を V_Λ とする。この時 τ_Λ は，P_+ 上恒等変換になるよう $K^{\mathbb{C}}P_+$ の正則な表現に拡張できる。そこで $\tau := \tau_\Lambda^*$ を V_Λ の双対空間 V_Λ^* の反傾表現とし，$\tilde{E}_\Lambda$ を τ に同伴な $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}P_+$ 上のベクトルバンドルとする。$G \cap K^{\mathbb{C}}P_+ = K$ で，G/K は $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}P_+$ における原点の G-orbit と同一視でき，E_Λ を $\tilde{E}_\Lambda$ の G/K への制限として定義する。

定義

$$\Gamma(\Lambda) := \{ f : GK^{\mathbb{C}}P_+ \to V_\Lambda^*,\ C^\infty \text{写像で，条件 (i), (ii) を満す} \}$$

ここで (i) $f(gb) = \tau(b^{-1}) f(g)$, $g \in GK^{\mathbb{C}}P_+$, $b \in K^{\mathbb{C}}P_+$

(ii) $\|f\|_2^2 := \lim_{t \uparrow 1} \int_K \|f(ku_t)\|^2 dk < \infty$.

補題1と条件 (i) より，$f(ku_t)$ は well-defined である。$\Gamma(\Lambda)$ は E_Λ の C^∞ 切断の作る空間であり，また，$\phi \in L^2_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ に対して，ϕ のポアッソン積分 $\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi$ は，E_Λ の C^∞ 切断とみなせる。ここで E は §3 におけるものを，τ は上記の $\tau = \tau_\Lambda^*$ を考えている。更に次のことが言える。

定理1 G/K が a tube domain と正則同型なエルミット対称空間とし，$\lambda = z\rho_E \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $z \in \mathbb{C}$ と Λ が次の条件を満すと

する：

(11) $\quad \mathrm{Re}\langle i\lambda, \alpha\rangle < 0 \qquad \forall\ \alpha\in\Sigma_+(E)$

(12) $\quad \Lambda(\sum_{\alpha\in\Delta} H_\alpha') = -(i\lambda+\rho_E)(X^0)$

この時 $\quad \mathcal{P}_{\tau,\lambda} L^2_{\tau,\lambda}(G/B(E)) \subset \Gamma(\Lambda)$

が成り立つ。

$\Gamma(\Lambda)$ は G の表現になってはいないので，$\Gamma(\Lambda)$ に次のような境界条件をつけた部分空間 $\Gamma_0(\Lambda)$ を考え，G の有界表現を構成する。

<u>定義</u> $\quad \Gamma_0(\Lambda) := \{ f\in\Gamma(\Lambda) \mid f$ は条件 (iii), (iv) を満す$\}$

ここで (iii) $\forall\ g\in G$, $\lim_{t\uparrow 1} f(gu_t) =$ 存在，この極限を $f(gu_1)$ とかいた時，この境界値 $f(gu_1)$ が

(13) $\quad \|f(gman\,u_1)\| \le M(n)\,|e^{\Lambda(\mathrm{Ad}(u_1^{-1})X)}|\,\|f(gu_1)\|$

$(g\in G,\ m\in M=Z_K(\mathfrak{a}),\ a=\exp X,\ X\in \mathrm{Cl}(\mathfrak{a}^+),\ n\in N,)$ を満す。—— この条件は，$f(gu_1)$ が実際"境界値"となるための条件。

(iv) $\quad G\ni g\longmapsto \|f(gu_1)\|$ が連続関数となる。

このように $\Gamma_0(\Lambda)$ を定義した時，G の $\Gamma_0(\Lambda)$ への作用を，

$$U_\Lambda(g)f(x) := f(g^{-1}x),$$

と定義すると $\Gamma_0(\Lambda)$ は G-不変となっている。$\Gamma_0(\Lambda)$ を $\{f\in\Gamma_0(\Lambda);\ \|f\|_2=0\}$ で割った空間を考え，その完備化を，$\Gamma_2(\Lambda)$ とする。この時，$U_\Lambda(g)$ は，ノルム $\|\cdot\|_2$ に関して有界作用素となるように，$\Gamma_2(\Lambda)$ に拡張できることがわかる。

他方、$L^2_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ に G は、$U_{\tau,\lambda}(g)\phi(x) := \phi(g^{-1}x)$ により有界作用素として、作用しているが、ポアッソン積分の定義より、

$$(14)\quad U_\Lambda(g)\cdot \mathcal{P}_{\tau,\lambda} = \mathcal{P}_{\tau,\lambda}\circ U_{\tau,\lambda}(g)$$

を満すことがわかるが、更に、次のことが言える。

<u>定理2</u>　定理1の仮定の下に、$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}$ は、$L^2_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ から、$\Gamma(\Lambda)$ への G-equivariant な有界作用素となる。

<u>注意</u>　定理1の条件 (12) は、要するに "${}^t\mathrm{Ad}(u_i^{-1})\Lambda = -(i\lambda+\rho_E)$ が $\mathfrak{a}$ 上で成り立つ" ことであるが、$\lambda\in\mathfrak{a}^*$ の時、G は、$L^2_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ にユニタリ作用素として作用する。しかし、一方で、Λ が、$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上の整形式であることをも要請しているので、$\lambda\in\mathfrak{a}^*$ の場合は、起り得ないことがわかる。

さて、$C^\infty(G,V_\Lambda^*)$ を G から V_Λ^* への C^∞ 写像全体とし、ν を G の、$C^\infty(G,V_\Lambda^*)$ への左正則表現とし、$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $C^\infty(G,V_\Lambda^*)$ への表現 ν を、

$$\nu(X)f(g) := \left[\frac{d}{dt} f(\exp(-tX)g)\right]_{t=0}$$

$g\in G$, $f\in C^\infty(G,V_\Lambda^*)$ と定義し、$U(\mathfrak{g})$ を、$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の展開環とした時、ν より、$U(\mathfrak{g})$ の $C^\infty(G,V_\Lambda^*)$ への表現が定義できる。そこで、$\nu(C)$ を、$C^\infty(G,V_\Lambda^*)$ への ν に関する Casimir 作用素とし、$C^\infty_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ を、$C_{\tau,\lambda}(G/B(E))\cap C^\infty(G,V_\Lambda^*)$ とおく。

そこで、Hardy class を、次のように定義する。

<u>定義</u>　$H_0(\Lambda) := \{f\in\Gamma_0(\Lambda)\ ;\ (\nu(C)-\langle\Lambda+2\delta,\Lambda\rangle)f=0\}$

更に、$H_2(\Lambda)$を、その完備化とする。この時できる、Gの有界表現$H_2(\Lambda)$を、ベクトルーバンドルE_Λにおける<u>Hardy class</u>と定義する。

この$H_2(\Lambda)$と、ポアッソン積分$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}$との関係は、次のようになっている。 $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^+ + \mathfrak{t}^-$の分解に従って、$\delta$，$\Lambda$を、

$\Lambda = \Lambda_+ + \Lambda_-$，$\delta = \delta_+ + \delta_-$ と分解する。M_0を、

$M = Z_K(\mathfrak{a})$の連結成分とする。$\mathfrak{t}^+$はM，M_0のCartan部分環となっているが、更に、Λ_+は、$\mathfrak{t}_+^{\mathbb{C}}$上の整形式で、

$$\langle \Lambda_+, \alpha \rangle \geq 0, \quad \forall \alpha \in R,\ \pi(\alpha) = 0$$

を満している。従って、M_0の既約ユニタリ表現τ_{Λ_+}で最高ウェイトをΛ_+にもつものが存在する。そこで、$C^\infty_{\tau,\lambda}(G/B(E))$の射影作用素を、

$$e_{\Lambda_+}\phi(g) := d_{\Lambda_+} \int_{M_0} \overline{\theta}_{\Lambda_+}(m)\, \phi(gm)\, dm, \quad \phi \in C^\infty_{\tau,\lambda}(G/B(E))$$

と定義する。ここで、d_{Λ_+}は、τ_{Λ_+}の表現空間の次元で、θ_{Λ_+}はτ_{Λ_+}の指標で、$\overline{\theta}_{\Lambda_+}(m)$は、$\theta_{\Lambda_+}(m)$の複素共役である。この時、

$e_{\Lambda_+} C^\infty_{\tau,\lambda}(G/B(E))$は、$C^\infty_{\tau,\lambda}(G/B(E))$の$G$不変部分空間であるが、更に次のことがわかる。

<u>定理3</u>　定理1の仮定の下に、

$$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\, e_{\Lambda_+} C^\infty_{\tau,\lambda}(G/B(E)) \subset H_2(\Lambda)$$

が成り立つ。

恐らく、$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}$は、$L^2_{\tau,\lambda}(G/B(E))$におけるノルムと、$H_2(\Lambda)$におけるノルム

を変えないであろうと思われるので、上記のことから、$H_2(\Lambda)$ が零にならないことが言えるのではないかと思われる。実際、

$G = SU(1,1)$ の場合は、次のようになっている：

$G = SU(1,1)$ の時、$K = T = \left\{ \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$、$G^{\mathbb{C}} = SL(2,\mathbb{C})$

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$、$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}$、$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ に関するルート系 R は、$R = \{\pm\gamma\}$、

$$\gamma : \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \ni \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \longmapsto -2\alpha$$

により与えられる。$E_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$、$E_{-\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とおく。更に、

$X_\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$、$Y_\gamma^0 = -\sqrt{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とする。この時、

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R} X_\gamma^0$$

$$u_t = \exp\left(-\frac{\pi t}{4}\right)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi t}{4} & \sin\frac{\pi t}{4} \\ -\sin\frac{\pi t}{4} & \cos\frac{\pi t}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{t}^- = \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{t}^+ = (0)$$

$$\delta : \mathfrak{t} \ni \begin{bmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{bmatrix} \longmapsto -i\theta,$$

$$\rho : \mathfrak{a} \ni \begin{bmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{bmatrix} \longmapsto t$$

となっている。$\Lambda := -n\delta$、n は整数 とおく。

この時、

"疎系列が存在する" $\Longleftrightarrow$ $n > 1$

となっている。

他方、$\lambda = z\rho$、$z \in \mathbb{C}$ とおくと、

主系列は、$i\lambda = iz\rho$、$\mathrm{Re}(iz) = 0$

によって与えられ，

補系列は， $i\lambda = iz\rho$ ， $0 < \mathrm{Re}(iz) < 1$

によって与えられる。

ところで，我々の条件は“ $\mathrm{Re}(i\lambda, \alpha) < 0$ ， $\alpha = 2\rho$ ，かつ ${}^t\mathrm{Ad}(w_i^{-1})\Lambda = -(i\lambda + \rho)$ on Ω ”であったが，これは，

$$i\lambda = (n-1)\rho, \quad n < 1.$$

となることがわかる。これは，Okamoto [11] で，最後に具体的に計算してあるところの，(II)．4) の場合である。

特に $n = 0$ i.e. $\Lambda = 0$ の時， $i\lambda = -\rho$ かつ τ_Λ は K の自明な表現となっているから，我々の Hardy class $H_2(\Lambda)$ は，序で述べた古典的な $H_2(D)$ となっている。

なおくわしい証明は，Urakawa [16] を参照してください。

References

[1] Harish-Chandra, Representations of semi-simple Lie groups : VI, Amer. J. Math., 78 (1956) 564-628

[2] ______, Spherical functions on a semi-simple Lie groups : I. II, Amer. J. Math., 80 (1958) 241-310, 553-613

[3] ______, On the theory of the Eisenstein integral, Springer, lecture note in Math. 266 (1971) 123-149

[4] S. Helgason, A duality for symmetric spaces with applications to group representations, Advances in Math., Vol. 5 (1970)

[5] A. W. Knapp and K. Okamoto, Limits of holomorphic discrete series, Jour. of Functional Analysis Vol. 9 (1972) 375-409

[6] A. Korányi, The Poisson integrals for generalized half-planes and bounded symmetric domains, Ann. of Math., 82 (1965) 332-350

[7] ______, Boundary behavior of Poisson integrals on symmetric spaces, Trans. of Amer. Math. Soc., (1969) 393-409

[8] ______ and J. A. Wolf, Realization of hermitian symmetric spaces as generalized half-planes, Ann. of Math. (2) 81 (1965) 265-288

[9] B. Kostant, On the existence and irreducibility of certain series of representations, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969) 627-642

[10] C. C. Moore, Compactifications of symmetric spaces : II, The Cartan domains, Amer. J. Math., 86 (1964) 358-378

[11] K. Okamoto, Harmonic analysis on homogeneous vector bundles, Springer, lecture note in Math. 266 (1971) 255-271

[12] ______ and H. Ozeki, On square-integrable $\bar{\partial}$-cohomology spaces attached to hermitian symmetric spaces, Osaka J. Math. 4 (1967) 95-110

[13] I. Satake, On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces, Ann. of Math. 71 (1960)

[14] G. Warner, Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, I, Springer (1972)

[15] A. Zygmund, Trigonometric series, 2nd. ed. Cambridge Univ. Press, New York (1959)

[16] H. Urakawa, On Hardy classes of harmonic sections and vector-valued Poisson integrals, a preprint 1973.